

# 기계공학실험 : 동역학 실험 C

## 빔의 고유진동수 측정 실험

5조 2019-15838 주기영

### 분 석

#### 1. Beam의 고유진동수

총 7개의 beam이 존재하여 beam 7에 대해서는 reference로 사용하고, beam 1~6에 대한 고유진동수를 측정한다.

reference로 사용할 beam의 중심축 부분에 가속도계를 위치시킨 후 랜덤한 주파수의 가진을 발생시킨다. 이 부분은 각 beam의 진동을 최대한 방해하지 않으면서 모든 beam의 진동을 측정할 수 있는 지점이기 때문이다. 먼저 reference 지점에서 측정된 FRF(Frequency Response Function) 얻어내고 이를 reference data라고 하자.

이후 각 beam의 고유진동수를 구하기 위하여 각 beam의 끝에 가속도계를 위치시키고 각각의 FRF를 모두 얻어낸다. 각 beam의 FRF에서 peak(최대값)의 위치를 확인하고, 이를 reference data와 겹쳐서 표시하였을 때 최대값과 가장 가까운 극대값을 갖는 frequency 값을 찾고, 이 frequency 값이 beam의 고유진동수이다. reference와 각 beam에서의 FRF를 모두 사용하여 고유진동수를 구하는 이유는 reference만 이용할 때에는 그래프에서 극대값이 여러 개 존재하는데 각각 어떤 beam의 고유진동수임을 알지 못한다.

각각의 beam에서 FRF를 구하는 경우에는 최대를 갖는 frequency가 고유진동수라고 생각할 수 있지만 FRF를 구하는 과정에서 가속도계의 무게가 추가되어 mass effect가 발생한다. 따라서 하나의 FRF만으로는 고유진동수를 정확하게 구해내는 것은 불가능하므로, 먼저 beam에 가속도계를 위치시키고, 고유진동수가 존재하는 frequency 구간을 확인하고, 이를 reference frame에서의 FRF를 이용하여 mass effect를 배제한 상태에서 정확하게

고유진동수를 구할 수 있다.

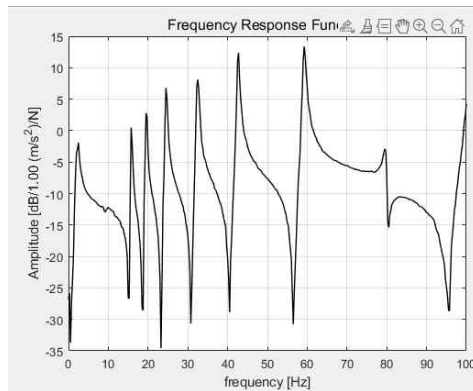


Fig 1. FRF for reference location

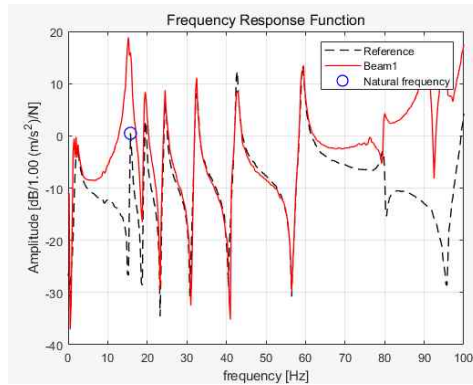


Fig 2. FRF for beam 1

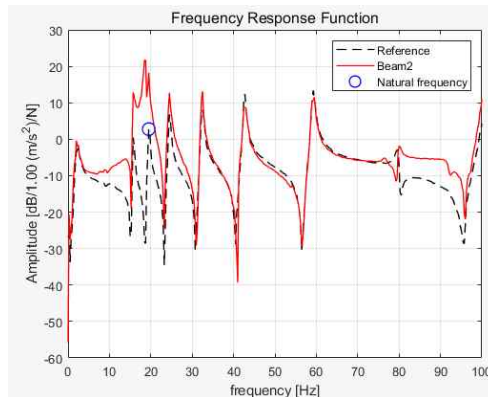


Fig 3. FRF for beam 2

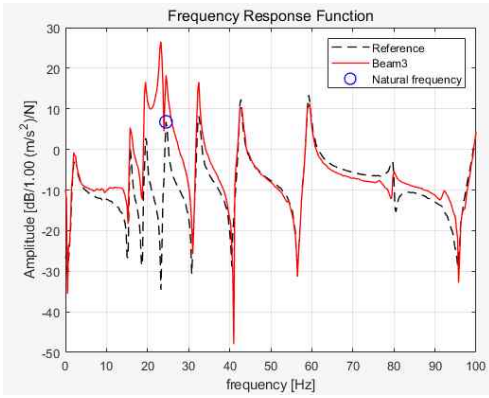


Fig 4. FRF for beam 3

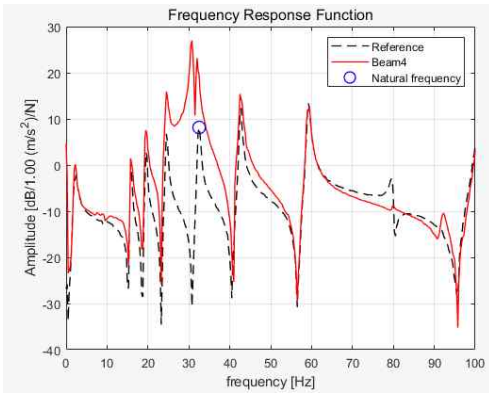


Fig 5. FRF for beam 4

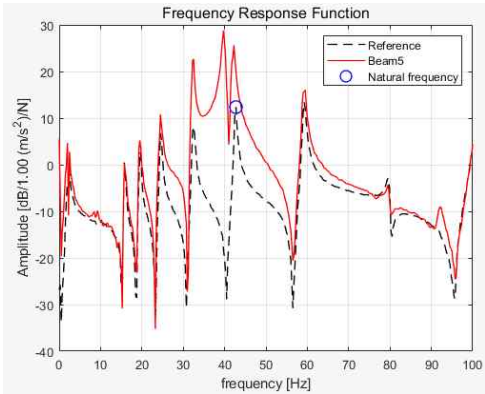


Fig 6. FRF for beam 5

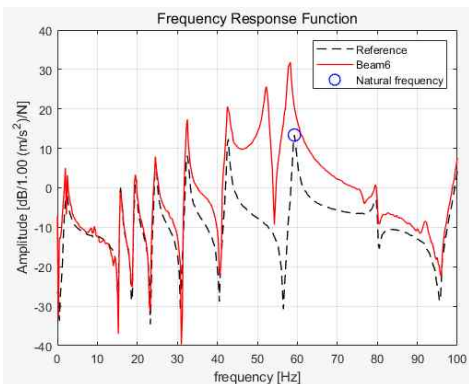


Fig 7. FRF for beam 6

Fig 1은 reference인 beam 7의 중심축 위에 가속도계를 올려놓고, 가진을 했을 때의 FRF이다. Fig 2~Fig 7의 결과는 beam 1~6에서 각각의 beam의 끝에 가속도계를 위치시키고, 가진을 했을 때의 FRF와 reference에서의 FRF를 겹쳐서 표현한 것이다. 여기서 reference의 극대값에 파란색으로 표현한 부분의 frequency가 각각의 beam의 고유진동수라고 할 수 있다. 각 beam의 고유진동수를 Table 1에 나타냈다.

Beam	Natural frequency $f_n$ [Hz]
1	15.75
2	19.50
3	24.50
4	32.50
5	42.75
6	59.25

Table 1. Natural frequency of beams

## 2. Equivalent mass & equivalent stiffness

beam은 1 DOF 시스템이 아니지만 몇 가지를 포함하게 되면 1 DOF 시스템으로 생각하여 하나의 질량과 하나의 스프링으로 이루어진 시스템으로 단순화시킬 수 있다. 이 때의 질량을 equivalent mass, 스프링의 stiffness를 equivalent stiffness라고 한다.

본 실험에서 beam을 외팔보로 모델링하고, Euler-Bernoulli beam으로 가정한 후 beam의 끝 점에서만 하중이 가해진다고 가정하면 실제로 식(1)과 같은 결과를 얻을 수 있다.

$$\delta = \frac{L^3}{3EI}P \quad (1)$$

$\delta$ 는 beam 끝에서의 deflection이고,  $E$ 는 beam의 탄성계수,  $I$ 는 beam의 단면의 moment of inertia이다. 이 식을  $F=kx$  꼴로 바꿔서 생각하였을 때  $k$ 에 해당하는 값이 equivalent stiffness이므로, beam system의 equivalent stiffness는 식(2)와 같이 나타낼 수 있다.

$$k_{eq} = \frac{3EI}{L^3} \quad (2)$$

beam의 moment of inertia는 식(3)과 같이 계산할 수 있다.

$$I = \frac{1}{12}bh^3 \quad (3)$$

$b$ 는 beam의 단면에서 가로 폭이며,  $h$ 는 높이이다. beam의 물성치와 탄성계수, moment of inertia를 Table 2에 나타내었다.

Beam	$E$ [GPa]	$L$ [mm]	$b$ [mm]	$h$ [mm]
1	195	350	2	50
2		318	2	50
3		285	2	50
4		250	2	50
5		217	2	50
6		185	2	50

**Table 2.** Property of beams

Table 2의 물성치를 이용하여 각 beam의 moment of inertia를 계산하면 모든 beam에서  $0.3333 \times 10^{-12} m^4$ 이며, 식(2)를 이용하여 각 beam의 equivalent stiffness를 계산한 것이 Table 3에 나타나 있다.

Beam	Equivalent stiffness $k_{eq}$ [N/m]
1	454.811
2	606.392
3	842.365
4	1248.0
5	1908.338
6	3079.778

**Table 1.** Natural frequency of beams

질량과 스프링으로 이루어진 1 DOF 시스템에서 고유진동수는 식(4)와 같이  $m_{eq}$ 와  $k_{eq}$ 를 이용하여 나타낼 수 있다.

$$w_n = \sqrt{\frac{k_{eq}}{m_{eq}}} \quad (4)$$

$w_n$ 은 beam의 natural frequency(고유진동수)이다. 본 실험에서 각각의 beam에서  $w_n$ 을 계산하였고, beam의 형상물성치를 통하여  $k_{eq}$ 를 계산하였으므로, equivalent mass를 두 가지 known value로 나타낸 것이 식(5)이다.

$$m_{eq} = \frac{k_{eq}}{w_n^2} = \frac{k_{eq}}{(2\pi f_n)^2} \quad (5)$$

식(5)를 통하여 각 beam의 equivalent mass를 계산하여 Table 4에 나타냈다.

Beam	$f_n$ [Hz]	$k_{eq}$ [N/m]	$m_{eq}$ [g]
1	15.75	454.811	46.442
2	19.50	606.392	40.395
3	24.50	842.365	35.547
4	32.50	1248.0	29.929
5	42.75	1908.338	26.449
6	59.25	3079.778	22.222

**Table 4.** Equivalent mass of beams

### 3. 흡진기를 포함한 2 DOF system

흡진기를 포함한 2 DOF system의 운동방정식을 각각의 coordinate인  $x_1, x_2$ 에 대해서 나타내면 식 (6), (7)과 같은 형태로 나타낼 수 있다.

$$m_1 x_1'' = f_1 - k_1 x_1 + k_2 (x_2 - x_1) \quad (6)$$

$$m_2 x_2'' = -k_2 (x_2 - x_1) \quad (7)$$

본 실험에서  $f_1$ 은 사인파 형태의 진동이므로, 각각의 coordinate의 output 또한 사인파 형태로 나타내지므로, 식(8), (9), (10)과 같이  $f_1, x_1, x_2$ 를 나타낼 수 있다.

$$f_1(t) = F_1 \sin(\omega t) \quad (8)$$

$$x_1(t) = X_1 \sin(\omega t) \quad (9)$$

$$x_2(t) = X_2 \sin(\omega t) \quad (10)$$

식 (8), (9), (10)을 각각 식 (7), (8)에 대입하고, 각각의 식을  $\sin(\omega t)$ 로 나누면  $X_1, X_2$ 를 행렬로 표현할 수 있다. 이를 표현한 것이 식(11)이다.

$$\begin{bmatrix} k_1 + k_2 - m_1 \omega^2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 - m_2 \omega^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (11)$$

system에 관련되어 정의되어 있는 변수 4개를 살펴보면 각각 식(12), (13), (14)에 나타냈다.

$$w_n = \sqrt{\frac{k_1}{m_1}}, w_a = \sqrt{\frac{k_2}{m_2}} \quad (12)$$

$$\mu = \frac{m_2}{m_1} \quad (13)$$

$$x_{st} = \frac{F_1}{k_1} \quad (14)$$

식(12)에 나타난  $w_n, w_a$ 는 각각 beam(주 시스템)과 흡진기(absorber)의 고유진동수이다. 또한 식(13)에 나타난  $\mu$ 는 beam(주 시스템)의 질량에 대한 흡진기의 질량의 비를 나타내는 물리량이며, 식(14)에 나타난  $x_{st}$ 는 주 시스템의 정적 변형이다. 식(11)의 좌변의 계수행렬을  $A$ 라고 하면 식(11)을 식(15)와 같이 나타낼 수 있고, 식(16)과 같이 간소화할 수 있다.

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} k_2 - m_2 \omega^2 & -k_2 \\ k_2 & k_1 + k_2 - m_1 \omega^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (15)$$

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} (k_2 - m_2 \omega^2) F_1 \\ k_2 F_1 \end{bmatrix} \quad (16)$$

또한 식(16)에서  $w_n, w_a, x_{st}, \mu$ 의 네 개의 변수를 이용하여 우변의 벡터부분을 간소화 시키면 식(17)과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \frac{k_1 k_2}{\det A} \begin{bmatrix} (1 - (\frac{w}{w_a})^2) \\ 1 \end{bmatrix} x_{st} \quad (17)$$

마지막으로, 식(17)의 우변의 계수부분을 앞선 네 개의 변수로 나타내면 식(18)과 같다.

$$\frac{k_1 k_2}{\det A} = \frac{1}{1 - (1 + \mu - (\frac{w}{w_a})^2)(\frac{w}{w_n})^2 - (\frac{w}{w_a})^2} \quad (18)$$

식(18)을 식(17)에 대입하면  $X_1, X_2$ 를 각각 식(19), (20)과 같이 나타낼 수 있다.

$$X_1 = \frac{(1 - (\frac{w}{w_a})^2) x_{st}}{1 - (1 + \mu - (\frac{w}{w_a})^2)(\frac{w}{w_n})^2 - (\frac{w}{w_a})^2} \quad (19)$$

$$X_2 = \frac{x_{st}}{1 - (1 + \mu - (\frac{w}{w_a})^2)(\frac{w}{w_n})^2 - (\frac{w}{w_a})^2} \quad (20)$$

식 (19)에서  $X_1$ 이 0이기 위한 조건은  $w_a$ 와  $w$ 가 같은 것이다.  $w$ 는 가하고 있는 외력의 진동수임을 상기하면 흡진기의 고유진동수와 외력의 진동수가 같을 때 beam(주 시스템)의 진폭이 0이 되고, 모든 진동이 흡진기에서 발생하게 된다. 이것이 흡진기가 주 시스템의 진동을 흡수하는 원리이다.

즉, 가진주파수와 흡진기의 고유진동수가 같을 때 주시스템의 진폭이 0이 된다.

#### 4. 흡진기의 equivalent mass, equivalent stiffness와 beam의 흡진 설계

먼저 본 실험에서 사용하는 흡진기의 형상 물성치를 Table 5에 나타냈다.

L[m]	h[mm]	b[mm]
175	20	1

Table 5. Property of absorber

또한, 흡진기의 고유진동수를 측정하는 것은 beam 1~6의 고유진동수를 구할 때와 마찬가지로 가속도계를 이용하여 Frequency response function

을 이용하였다. Fig 8은 흡진기를 beam 4에 설치하고, 흡진기 위에 가속도계를 위치시켰을 때의 FRF를 나타낸 것이다.

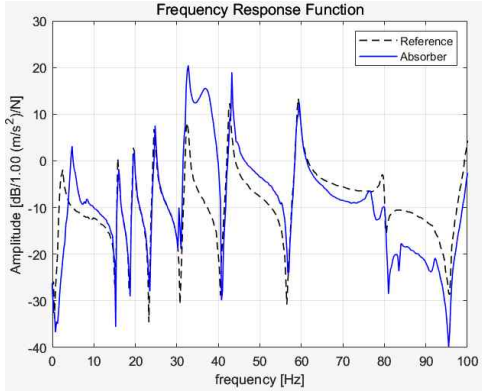


Fig 7. FRF for absorber

Fig 7에서 흡진기의 고유진동수 또한 32.5Hz임을 알 수 있고, 이 흡진기는 beam 4를 위하여 만들어진 흡진기임을 알 수 있다. Table의 정보를 이용하여 흡진기의 moment of inertia를 계산하면  $1.667 \times 10^{-12} m^4$ 임을 계산할 수 있고, 식(2)를 이용하여 equivalent stiffness를 계산한다. 고유진동수와 equivalent stiffness의 값과 식(5)를 이용하여 equivalent stiffness를 계산하여 모두 나타낸 것이 Table 6이다.

$k_{eq}$ [N/m]	$f_n$ [Hz]	$m_{eq}$ [g]
182.924	32.5	4.362

Table 6. Equivalent system of the absorber

본 실험에서 사용된 흡진기는 beam 4와 고유진동수가 같아 beam 4의 고유진동수에 해당하는 가진이 발생할 때 beam 4의 진동을 모두 흡수하고 흡진기만 진동하는 현상을 볼 수 있다.

동일한 흡진기를 사용하면서 흡진기의 끝에 질량 변화  $\Delta m$ 을 가하면 흡진기의 고유진동수를 변화시킬 수 있다. 이를 통하여 beam 1, 2, 3, 5, 6에 알맞은 흡진기를 설계할 수 있다.

흡진기에  $\Delta m$ 의 효과를 적용시켰을 때의 고유진동수를  $\Delta m$ 의 함수로 작성하면 식(21)과 같고, 어떠한 고유진동수에 대하여 적용시켜야 할  $\Delta m$ 을 표현한 것이 식(22)이다.

$$w_a(\Delta m) = \sqrt{\frac{k_{eq,a}}{m_{eq,a} + \Delta m}} \quad (21)$$

$$\Delta m(w_a) = \frac{k_{eq,a}}{w_a^2} - m \quad (22)$$

Table 1에서 구한 각 beam의 고유진동수를 식(22)의  $w_a$ 에 대입하면 각 beam에서 흡진기로 작용하기 위한  $\Delta m$ 을 계산할 수 있고, 이를 Table 7에 나타냈다.

Beam	$\Delta m$ [g]
1	14.214
2	7.756
3	3.314
4	0
5	-1.841
6	-3.051

Table 7. Required mass change for absorber to remove the vibration of each beam

흡진기에 Table 7에 해당하는 만큼 흡진기의 끝에 질량을 추가할 수 있으면 다른 beam의 고유진동수에 해당하는 진동을 흡수하는 흡진기로 사용할 수 있다.