

기계공학실험 : 유체역학 실험 B

Uniform flow over a flat plate

5조 2019-15838 주기영

분 석

1. Boundary layer thickness, displacement thickness, momentum thickness와 wall shear stress의 물리적인 의미와 계산 방법

1.1 Boundary layer thickness

Boundary layer analyze는 유체가 고체로 이루어진 평판을 따라서 운동하는 동안 유체의 점성에 의한 효과를 분석하기 위해서 적용된다. 이를 적용할 때 Boundary layer thickness δ 를 정의를 살펴보자. Fig 1에서 볼 수 있듯이 free stream의 x 방향으로의 속력을 U_∞ 으로 하고, 특정 x좌표를 지닌 xy평면 상의 직선을 생각할 때 직선을 따라서 $u_x(y)$ 가 정의된다. 이 때, δ 는 식(1)을 만족시키는 y좌표인 것이다. (물론 평판에서의 y값이 0으로 정의되었을 때에만 가능하다.) 즉, $0.99U_\infty$ 을 만족하는 지점까지의 유체의 두께를 의미하는 것이다. 이는 고체 평판에 의한 점성이 유체에 영향을 주는 두께라고 생각할 수 있다. Fig 1에서도 알 수 있듯이 처음 평판을 만나는 순간에는 δ 가 0이지만 평판을 따라서 계속 운동하면서 δ 값이 증가한다.

$$u_x(\delta) = 0.99 U_\infty \quad (1)$$

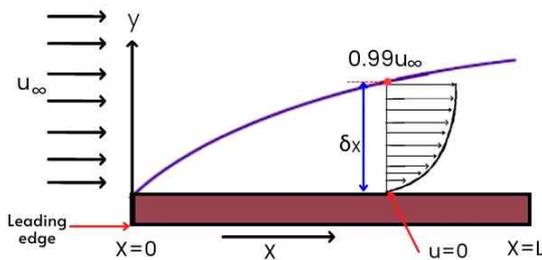


Fig 1. Boundary layer thickness

유체의 유동이 층류인지 난류인지에 따라서 δ 를 계산하는 방법이 다르다. 층류일 때의 δ 를 어떻게 계산할 수 있는지 살펴보자.

(1) δ of laminar flow [3]

먼저 비압축성 유체임을 가정하면 식(2)의 연속방정식과 식(3), (4)의 x방향과 y방향의 유체의 momentum conservation equation(나비에 스토크스 방정식)을 얻는다. $Re_x \gg 1$ 임을 가정하였고, x축 방향으로 발달된 평판을 따라 움직이므로, 식(5) 또한 성립한다. x방향 속력 u가 y방향 속력 v보다 훨씬 크며, 각각의 속력의 x방향 편미분은 거의 0에 가까운 값을 갖는다. 식(4)의 압력의 x방향 편미분 term을 제외하고는 모두 0에 가까운 값을 가지므로, 식(6)이 성립하고, 즉, 압력 p 는 x만의 함수 $p(x)$ 로 표현할 수 있다. 또한 압력 $p(x)$ 에 대하여 유체의 에너지 보존법칙인 Bernoulli's equation을 적용하면 식(7)을 얻을 수 있다. 또한, 식(3)의 u의 x에 대한 이계편미분 term은 0으로 근사할 수 있으므로, 식(3)을 식(7)을 대입하고, 밀도 ρ 로 나눠 식(8)로 정리할 수 있다. 벽의 점성과 u의 관계 또한 이용하였고, 이는 후술한다.

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (2)$$

$$\rho(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y}) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}) \quad (3)$$

$$\rho(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y}) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}) \quad (4)$$

$$v \ll u, \frac{\partial u}{\partial x} \ll \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x} \ll \frac{\partial v}{\partial y} \quad (5)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad (6)$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{dp}{dx} = -\rho U \frac{dU}{dx} \quad (7)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = U \frac{dU}{dx} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau}{\partial y} \quad (8)$$

미분방정식 $f^{(3)} + \frac{1}{2}ff'' = 0$ 의 해 함수 f 와 식(9)에 정의된 변수 η 에 대해서 식(9)가 성립한다. δ 의 정의를 생각하면 δ 는 $f'(\eta^*) = 0.99$ 인 η^* 를 계산함으로써 찾을 수 있다. $f(0) = f'(0) = 0$ (no slip condition)과 $f'(\infty) = 1$ (free stream condition)의 경계조건을 이용하여 수치해석을 적용하면 $\eta^* = 5.0$ 임을 계산할 수 있다. 따라서 이를 통해 δ/x 를 계산하면 식(10)과 같이 나타낼 수 있다. 층류와 난류는 레이놀즈 수에 의해서 결정되고, 식(11)은 층류에서의 레이놀즈 수의 범위이다. 즉, 식(10)은 이 조건 하에서만 유효하다는 의미이다.

$$\eta = y \left(\frac{U}{\nu x} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad f'(\eta) = \frac{u}{U} \quad (9)$$

$$\frac{\delta}{x} = \frac{5.0}{Re_x^{\frac{1}{2}}} \quad (10)$$

$$10^3 < Re_x < 10^5 \quad (11)$$

(2) δ of turbulent flow [3]

난류는 Fluctuation이 매우 심한 유체의 유동이다. 따라서 이를 수학적으로 다루기가 매우 어렵다. 하지만 여러 가지의 근사를 통하여 접근한 후 (1)의 층류에서의 δ 를 계산한 것과 마찬가지로 한다면 식(12)과 같은 δ 를 계산할 수 있다. 이는 매우 복잡한 과정이므로 생략한다. 식(13)은 난류에서의 레이놀즈 수의 범위이다.

$$\delta = \frac{0.16}{Re_x^{\frac{1}{7}}} x \quad (12)$$

$$10^6 < Re_x \quad (13)$$

1.2 Displacement thickness

Displacement thickness δ^* 는 경계층 유동의 효과에 의해 생기는 mass deficit에 관한 물리량이다. 경계층 유동이 없다고 가정하고 $u_x(y) = U_\infty$ 로 유량을 계산했을 때와 경계층 유동의 효과로 인하여 발생하는 $u_x(y)$ 를 고려하여 유량을 계산하였을 때의 유량 손실(mass deficit)이 발생한다. 이 때 δ^* 는 Fig 2에서 관찰할 수 있듯이 경계층 유동에서의 유량을 갖도록 free stream으로 이동할 때 y

축 방향으로부터 표면이 얼마나 이동해야 하는지를 의미한다.

Fig 2의 왼쪽이 경계층 유동을 고려할 때이고, 오른쪽이 경계층 유동이 없다고 가정한 경우이다. 즉, δ^* 의 정의에 의해서 오른쪽의 경우에서 δ^* 만큼 표면이 올라왔을 때 두 가지 경우에서 유량을 구했을 때 같은 값이 나와야 하는 것이다. 두 가지 경우에서 δU_∞ 의 값이 같으므로, 유량이 같기 위해서 mass deficit 양이 같아야 하므로, 식(12)와 같이 δ^* 를 계산할 수 있다. 층류의 경우에는 δ^*/x 를 레이놀즈 수의 함수로 나타낼 수 있으며 난류의 경우에는 고려해야 할 요인이 많아 특정한 함수의 형태로 나타낼 수 없다. 층류의 δ^*/x 는 식(13)와 같이 나타낼 수 있다.

$$\delta^* = \int_0^\delta (1 - \frac{u}{U}) dy \quad (12)$$

$$\frac{\delta^*}{x} = \frac{1.721}{\sqrt{Re_x}} \quad (13)$$

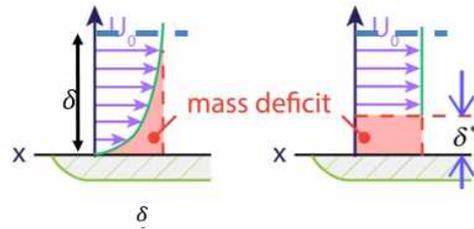


Fig 2. Boundary layer thickness

1.3 Momentum thickness [3]

Displacement thickness는 경계층 유동에 의한 질량손실에 관한 물리량이다. Momentum thickness θ 는 이와 유사하게 경계층 유동에 의한 유체의 운동량 손실에 관한 물리량이다. 식(14)와 같이 경계층 유동에 의해 손실된 운동량이 U_∞ 의 속도를 갖는 유체의 등가운동량을 갖기 위해서 얼마만큼의 두께 θ 가 필요한지로 정의된다. 식(14)는 유체의 운동량 방정식 또한 포함되어 θ 와 유체의 Drag force D 의 관계 또한 알 수 있다. 또한, 질량 보존을 나타내는 식(15)를 식(14)에 대입하면 θ 를 식(16)과 같이 나타낼 수 있다.

$$-\frac{D}{w} = \int_0^\delta \rho u(y)^2 dy - \int_0^h \rho U^2 dy = -\rho U^2 \theta \quad (14)$$

$$\int_0^h \rho U dy = \int_0^\delta \rho u(y) dy \quad (15)$$

$$\theta = \int_0^{\delta} \frac{u(y)}{U} \left(1 - \frac{u(y)}{U}\right) dy \quad (16)$$

또한, Drag force와 전단응력의 관계식 식(17)을 고려하고, 식(14)를 정리하면 θ 와 전단응력 τ 에 대한 식(18)을 얻을 수 있다. 층류의 경우에는 Displacement thickness와 마찬가지로 θ/x 를 레이놀즈 수의 함수로 나타낼 수 있고, 이는 식(19)와 같다. 난류의 경우에는 계산하는 것이 매우 복잡하기 때문에 생략하였다.

$$D = w \int_0^x \tau(x) dx, \quad \frac{dD}{dx} = w\tau(x) \quad (17)$$

$$\tau_{wall} = \rho U^2 \frac{d\theta}{dx} \quad (18)$$

$$\frac{\theta}{x} = \frac{0.664}{\sqrt{Re_x}} \quad (19)$$

1.4 Wall shear stress [3]

Fig 3과 같이 유체가 운동하면서 평면에 의하여 전단응력 τ 를 받는 상황에서 유체가 뉴턴 유체임을 가정하면 응력과 변형률의 시간미분이 비례한다고 가정할 수 있다. 유체의 전단변형률 $\delta\theta$ 이 매우 작다고 가정하면 $\tan\delta\theta \approx \delta\theta$ 로 근사가 가능하고, 식(20)가 성립한다. 응력과 변형률의 시간미분이 비례함을 이용하면 식(21)와 같은 비례식을 얻는다. 식(21)의 비례상수를 유체의 viscosity μ 로 정의한다. 본 실험에서 이를 적용하여 wall shear stress를 구할 때 τ_{wall} 은 $y=0$ 인 경우이므로, 식(22)과 같이 나타낼 수 있다.

$$\tan\delta\theta = \delta\theta = \frac{\delta u}{\delta y} \quad (20)$$

$$\tau \propto \frac{du}{dy} \quad (21)$$

$$\tau_{wall} = \mu \left. \frac{du}{dy} \right|_{y=0} \quad (22)$$

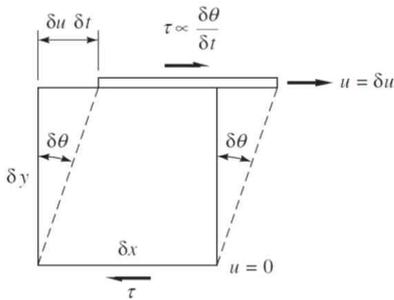


Fig 3. Shear stress for fluid

1.5 Calculation with PIV

δ , δ^* , θ , τ 는 모두 유체역학의 근본적인 가정인 연속체 가정 하에서 정의되었고, 연속적인 속도분포를 가질 때 정확하게 계산할 수 있다. 하지만 본 실험에서는 PIV 기법을 적용하여 유체의 속도장을 구하는데 이는 공간 내의 연속적으로 분포하는 속도장을 계산할 수 없으며, window 내부에서의 속도벡터를 각각 구할 수 있으므로, 이산적인 속도장인 $u(i, j)$ 를 이용하여 data를 계산할 수 있다. i, j 는 각각 x축, y축 방향으로 일정한 간격으로 떨어져 있는 벡터이다. 따라서 PIV 기법을 활용하여 얻은 속도장을 이용하여 δ , δ^* , θ , τ 를 어떻게 구할 것인지 논의가 필요하다.

δ 의 경우는 정의에 따라서 $u_x(\delta) = 0.99U_\infty$ 를 만족하는 값을 찾으면 된다. 하지만 이산적인 데이터에서 그러한 값을 포함하지 않을 수 있으므로, 본 실험에서는 $u_x(y)$ 가 최대를 갖는 y좌표를 δ 로 설정하였다. 또한, δ^* , θ , τ_{wall} 에 대한 식(12), (16), (20)은 각각 적당한 수치적분과 수치미분을 이용하여 식(23), (24), (25)과 같이 근사하여 나타낼 수 있다. 이러한 방법을 이용하여 이산 속도장 $u(i, j)$ 하에서 δ , δ^* , θ , τ_{wall} 를 계산할 것이다. 또한 Drag force는 식(17)의 관계를 이용하면 식(25)을 수치적분하여 식(26)과 같이 나타낼 수 있다. Fig 4에서 이를 확인할 수 있으며, 식(23) ~ (25)는 모두 $x=L$ 에서 정의된 δ^* , θ , τ_{wall} 이며 식(26)의 D 는 $x=0$ 부터 $x=L$ 까지 τ_{wall} 에 의해 작용하는 Drag force를 적분하여 계산한 것이다.

$$\delta^* = \sum_{j=1}^k \left(1 - \frac{u(n, j)}{U}\right) \frac{\delta}{k} \quad (23)$$

$$\theta = \sum_{j=1}^k \frac{u(n, j)}{U} \left(1 - \frac{u(n, j)}{U}\right) \frac{\delta}{k} \quad (24)$$

$$\tau_{wall} = \mu \frac{u(n, 2) - u(n, 1)}{\delta/k} \quad (25)$$

$$D = w \sum_{l=1}^n \left(\mu \frac{u(n, 2) - u(n, 1)}{\delta/k} \right) \Delta l \quad (26)$$

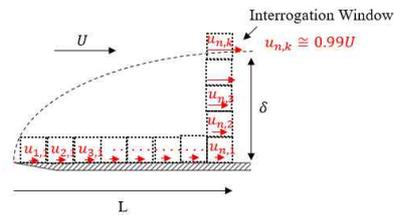


Fig 4. Calculation with PIV

2. PIV를 통한 경계층 유동에서의 Boundary layer thickness, displacement thickness, momentum thickness와 wall shear stress distribution 계산

2.1 PIV setting 방법

본 실험을 진행할 때 경계층 유동에서의 속도장인 $u(i, j)$ 를 구하는 것에서 MATLAB의 PIV LAB을 사용한다. 처음 PIV setting을 어떻게 진행했는지 먼저 설명하고자 한다. 가장 먼저 ROI를 평판 위에서부터 수조 내에 있는 유체의 모든 부분으로 설정하여 이 부분을 관찰하였다.

실험 A에서의 PIV 기법 적용을 상기해보면 PIV가 유효하기 위해서 1/4-law를 고려해야 한다. 또한 Stokes number 또한 고려해야 하는데 실험 A보다 더 낮은 Pump frequency에서 실험을 진행하기 때문에 Stokes number가 0.1보다 작은 것은 확인이 된다.

또한, 본 실험에서는 $u(i, j)$ 를 얻어내야 하는데 유체역학을 다룰 때는 연속체 가정을 하기 때문에 실험의 결과로 이론적인 값과 실험적인 값을 비교할 때 $u(i, j)$ 가 더욱 조밀한 분포를 가질수록 실험의 유효성이 높아진다. 따라서 실험 A보다 Irrogation window의 가로, 세로의 길이를 더욱 줄여서 하면 더욱 유효한 실험 결과를 얻어낼 수 있을 것이라 생각하였다. 하지만 1/4-law 또한 고려해야 하기 때문에 가장 적당한 20px로 진행하였다. Step은 그것의 50%인 10px로 진행하였다. 본 실험에서는 실험 A보다 카메라를 확대해서 촬영하였기 때문에 Irrogation window의 실제 크기는 A에 비해 많이 작도록 설정하였다고 할 수 있다.

더욱 정확한 PIV의 결과를 얻기 위하여 Image pre-processing을 CLAHE filter와 highpass filter를 이용하여 진행하였다. PIV를 진행할 때 정확한 속도값을 구하기 위하여 reference length와 시간을 설정해야 한다. 본 실험에서 경계층을 발생시키는 평판의 두께가 5mm임을 알고 있으므로 이를 reference length로 사용하였고, 두 연속 프레임에서의 시간 간격은 카메라의 FPS가 1000임을 고려하면 1ms로 설정하였다. post-processing은 설정하지 않고 진행하였다. 이러한 설정을 통하여 실험을 진행하고, Steady state 가정을 통하여 시간평균 속도벡터장을 이용하였다. u 를 각각의 rpm에서 나타내보면 Fig 9, 10과 같은 결과를 볼 수 있다.

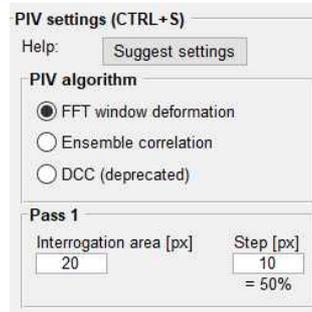


Fig 5. Interrogation area setting

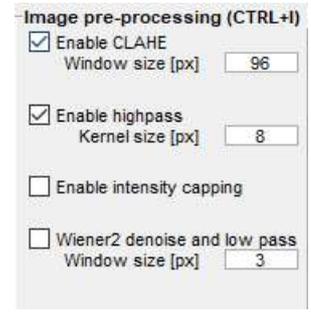


Fig 6. Image pre-processing

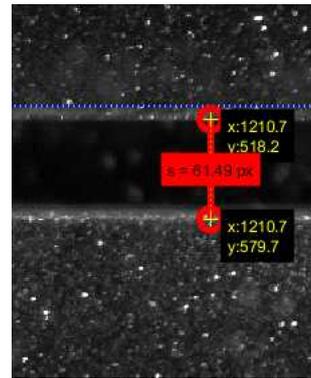


Fig 7. Reference length

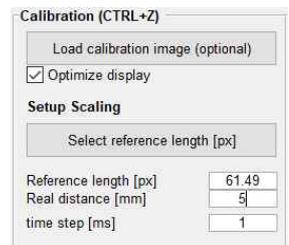


Fig 8. Calibration

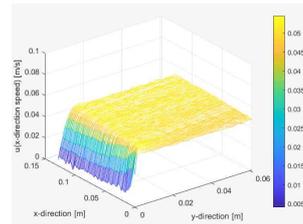


Fig 9. 10rpm

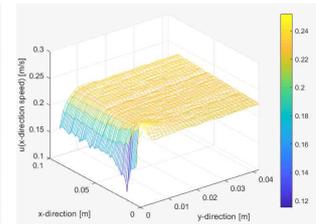


Fig 10. 30rpm

2.2 Free stream velocity

실험 A에서와 마찬가지로 10rpm, 30rpm에서의 각각의 속력은 0.1m/s, 0.3m/s를 넘지 못한다. 이를 통하여 Stokes number는 0.1보다 작고, 각각의 경우에서 1/4-law를 만족한다. 따라서 PIV 기법으로 얻은 속도벡터장이 유효하다. U_∞ 를 구하기 위해서 주어진 속도벡터장 중 평판에서 0.03m 떨어진 곳에서의 시공간 평균을 통하여 계산하여 Table 1에 나타냈다. 공간평균의 Normalized fluctuation velocity를 나타내면 Fig 11와 같다. 이는 모든 점에서 0.98~1.02의 값을 가지므로 변동성이 작고, 실험 상황이 steady state임을 뒷받침한다.

	10rpm	30rpm
U_∞ [m/s]	0.0455	0.2204

Table 1. Free stream velocity

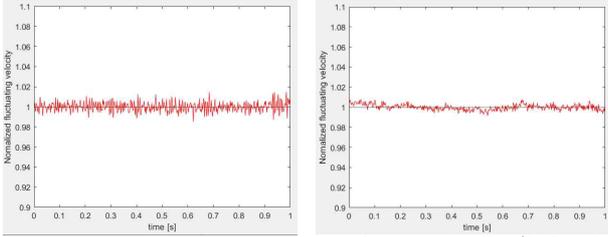


Fig 11. Normalized fluctuation velocity(left: 10 rpm, right : 30rpm)

2.2 Boundary layer thickness

사진에서 나타난 평판은 1112px의 길이 1px 당 0.0824mm의 길이를 가지므로, 약 0.09m임을 알 수 있다. 평판이 ideal한 평판이 아니고 실제로 이상적인 상황이 아니기 때문에 완전한 laminar flow가 발생하지 않고, 평판을 따라 운동하면서 와류가 발생한다. 따라서 경계층 유동이 나타나는 지점에서의 $u_x(y)$ 를 생각해보자. 두 실험 모두에서 같은 ROI를 사용하였으므로 좌표계 x의 범위는 0~0.091m이며, y의 범위는 0~0.042m로 사용하였다.

L=9.8mm, 19.6mm, 29.4mm에서 각각의 속도분포 $u_L(y)$ 를 plot해본 것이 각각 Fig 12, 13이다. 이곳에서의 속도분포는 y값의 증가에 따른 심한 fluctuate가 관찰되지 않으므로 와류의 영향이 작아 경계층 유동이 잘 나타난다고 할 수 있다. 따라서 이 세 지점에서 모든 물리량을 구하고자 한다. 각 지점에서 δ 를 Table 2에 나타냈다.

10 rpm			
L [mm]	9.8	19.6	29.4
δ^* [mm]	2.52	4.21	5.04
30 rpm			
L [mm]	9.8	19.6	29.4
δ^* [mm]	2.63	3.94	5.25

Table 2. Boundary layer thickness (실험값)

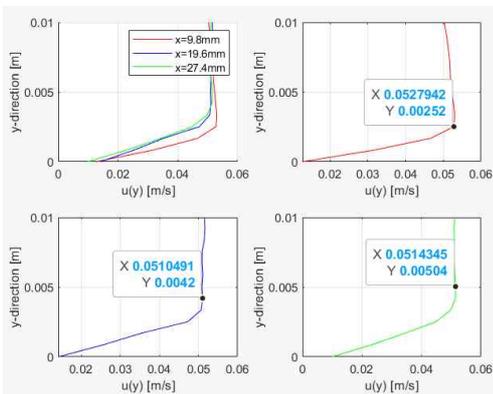


Fig 12. $u_x(y)$ (10rpm)

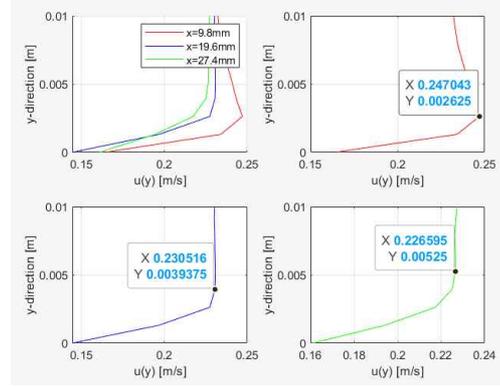


Fig 13. $u_x(y)$ (30rpm)

2.3 Displacement thickness, Momentum thickness, Wall shear stress

식(23)~(25)에 사용되는 δ/k 는 이산벡터장의 바로 옆 벡터 간의 거리이므로, 10rpm에서는 10px인 0.824mm, 30rpm에서는 15px인 1.236mm로 설정하고 계산을 진행하였다. δ^*, θ, τ_w 를 이산벡터장 $u(i,j)$ 하에서 계산할 때 식(23), (24), (25)를 이용하였다. 상온에서의 물의 점성 계수, 밀도, 동점성 계수인 식(27), (28)의 값을 사용하였다.

$$\mu = 1.002 \times 10^{-3} \text{ N s/m}^2, \rho = 998 \text{ kg/m}^3 \quad (27)$$

$$\nu = \mu/\rho = 1.004 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s} \quad (28)$$

10 rpm			
L [mm]	9.8	19.6	29.4
δ^* [mm]	0.682	0.883	0.961
30 rpm			
L [mm]	9.8	19.6	29.4
δ^* [mm]	0.563	0.783	0.897

Table 3. Displacement thickness (실험값)

10 rpm			
L [mm]	9.8	19.6	29.4
θ [mm]	0.163	0.269	0.297
30 rpm			
L [mm]	9.8	19.6	29.4
θ [mm]	0.135	0.298	0.327

Table 4. Momentum thickness (실험값)

10 rpm			
L [mm]	9.8	19.6	29.4
τ_w [N/m]	0.0235	0.0139	0.0161
30 rpm			
L [mm]	9.8	19.6	29.4
τ_w [N/m]	0.0567	0.0424	0.0271

Table 5. Wall shear stress (실험값)

3. 10rpm, 30rpm에서의 flow가 층류/난류인지 논의, 각 flow에서 Drag force와 Drag coefficient 계산($0 < x < L$)

3.1 각 rpm에서의 flow 층류/난류인지 논의

식(29)에서와 마찬가지로 flow가 층류인지 난류인지 판단하는 기준은 레이놀즈 수의 값에 따른다. 또한 레이놀즈 수는 식(30)와 같이 계산할 수 있고, 식(28)의 동점성계수를 이용하고, 나타난 촬영 사진에서 평판의 길이가 0.09m이고, 또한 각 rpm에서의 free stream을 이용하면 식(31), (32)과 같이 각각의 레이놀즈 수를 계산할 수 있다. 이는 모두 laminar flow의 레이놀즈 수의 범위에 속하기 때문에 이론적으로 두 flow에서 나타난 부분은 층류에 속한다고 할 수 있다. 하지만 특성길이가 가장 작은 9.8mm에서 레이놀즈 수를 계산해보면 각각 444.124, 2151.31이다. 따라서 10rpm에서는 1000보다 작은 레이놀즈 수를 가져 식(29)에 따르면 층류라고 볼 수 없으나 층류로 간주하고, 실험을 진행하였고, 이를 오차에 포함하였다.

물론 실제로 평판의 뒷부분으로 갈수록 vortex가 발생하여 flow가 층류 이론을 완전히 따르지는 않지만 실제로 $L=9.8\text{mm}$, 19.6mm , 29.4mm 에서는 flow가 층류와 비슷한 양상을 보였다.

$$10^3 < Re_x < 10^5 \text{ (laminar)} \quad (29)$$

$$10^6 < Re_x \text{ (tubulent)}$$

$$Re_x = \frac{U_\infty x}{\nu} \quad (30)$$

$$Re_L = \frac{0.0455 \times 0.09}{1.004 \times 10^{-6}} = 4078.69 \text{ (10rpm)} \quad (31)$$

$$Re_L = \frac{0.2204 \times 0.09}{1.004 \times 10^{-6}} = 19756.97 \text{ (30rpm)} \quad (32)$$

3.2 Drag coefficient

Drag force는 두 가지 방법을 이용하여 계산할 수 있다. 첫 번째는 wall shear stress를 x방향으로 적분하는 것이고, 두 번째는 Momentum thickness의 개념을 이용하는 것이다. 이를 계산하는 방법은 식(33)에 나타내었다. 또한, Drag coefficient C_D 는 유체와 물체 사이의 저항력을 표현하는 무차원수로 식(34)과 같이 정의된다. 또한 Drag force의 계산 방법이 2가지이므로, 항력계수 또한 2가지 방법을 이용하여 계산할 수 있다. 식 (35)에 이를 나타내었다. 식(35)를 이산벡터장 $u(i, j)$ 하에

서 계산하기 위해 식(36)과 같이 변형할 수 있다.

$$C_D = \frac{D}{\frac{1}{2} \rho U^2 w L} \quad (34)$$

$$C_D = \frac{\rho U^2 w \theta}{\frac{1}{2} \rho U^2 w L} = \frac{w \int_0^L \tau_w(x) dx}{\frac{1}{2} \rho U^2 w L} \quad (35)$$

$$C_D = \frac{2\theta}{L} = \frac{\sum_{i=1}^n (\mu \frac{u(i,2) - u(i,1)}{\delta/k} \Delta l)}{\frac{1}{2} \rho U^2 L} \quad (36)$$

식(26)을 이용하여 이산벡터장 $u(i, j)$ 하에서 각각의 Drag force를 계산하였다. Drag force는 평판의 시작부터 각각 9.8mm, 19.6mm, 29.4mm까지의 범위에서 계산하였고, width 방향의 평균을 통하여 계산하였다. C_D 또한 Drag force를 계산하는 범위에서 같이 계산되었다.

10 rpm ($L=9.8\text{mm}$)	D/w [N/m]	C_D
using θ	3.368×10^{-4}	0.03327
using τ_w	2.211×10^{-4}	0.02184
30 rpm ($L=9.8\text{mm}$)	D/w [N/m]	C_D
using θ	65.447×10^{-4}	0.02755
using τ_w	3.131×10^{-4}	0.00132
10 rpm ($L=19.6\text{mm}$)	D/w [N/m]	C_D
using θ	5.558×10^{-4}	0.02745
using τ_w	4.098×10^{-4}	0.02023
30 rpm ($L=19.6\text{mm}$)	D/w [N/m]	C_D
using θ	144.48×10^{-4}	0.03125
using τ_w	8.985×10^{-4}	0.00194
10 rpm ($L=29.4\text{mm}$)	D/w [N/m]	C_D
using θ	6.137×10^{-4}	0.02168
using τ_w	5.571×10^{-4}	0.01968
30 rpm ($L=29.4\text{mm}$)	D/w [N/m]	C_D
using θ	158.512×10^{-4}	0.02387
using τ_w	12.616×10^{-4}	0.00183

Table 6. Drag force & Drag coefficient (실험값)

4. $u_x(y)$ 가 이차함수임을 가정하고, Boundary layer thickness, displacement thickness, momentum thickness와 wall shear stress distribution, drag force와 drag coefficient 계산 (동점성계수(ν), x축 좌표(x), plate 길이(L), Free stream velocity(U_∞)의 함수)

4.1 $u_x(y)$ 의 설정 [3]

이차함수는 세 개의 미지계수를 가지므로, 세 개의 경계조건이 필요하다. 이 세 개의 조건은 식(37)에 표현하였다. 차례대로 평판과 완전히 맞닿아 있는 지점의 속도가 0인 것, $y=\delta$ 에서의 속도가 $0.99U$ 이어야 하는 것(계산의 편의를 위하여 $y=\delta$ 의 속도가 U 인 것으로 설정함), 또한 $y=\delta$ 속도의 변화량이 0에 가까워야 하므로 미분계수가 0이다. 세 개의 경계조건을 이렇게 설정하였고, 이 경계조건을 통하여 얻어낸 $u_x(y)$ 가 식(38)이다.

$$u(0) = 0, u(\delta) = U, u'(\delta) = 0 \quad (37)$$

$$\frac{u_x(y)}{U} = \left(\frac{2y}{\delta} - \frac{y^2}{\delta^2} \right) \quad (38)$$

식(12), 식(16)을 이러한 $u_x(y)$ 를 대입하여 계산하면 δ^*, θ 를 계산할 수 있다. 이 때 식(39)의 치환을 이용하여 쉽게 계산할 수 있다. 또한, τ_{wall} 은 정의에 의하여 식(42)과 같이 계산할 수 있으며 이는 식(18)과도 같아야 한다. τ_{wall} 의 등식에 식(41)에서 $\theta = 2\delta/15$ 를 대입하면 식(43)에 표현한 δ 와 x 의 변수분리형 꼴의 미분방정식을 만들 수 있다. 이 미분방정식을 $x=0$ 일 때의 δ 가 0인 경계조건을 이용하여 해를 구하면 결과적으로 식(44)을 얻을 수 있다.

$$y/\delta = p, dy = \delta dp \quad (39)$$

$$\delta^* = \delta \int_0^1 (1 - 2p + p^2) dp = \left(1 - \frac{2}{3} + 1\right) \delta = \frac{1}{3} \delta \quad (40)$$

$$\begin{aligned} \theta &= \delta \int_0^1 (1 - 2p + p^2)(2p - p^2) dp \\ &= \delta \int_0^1 (-p^4 + 4p^3 - 5p^2 + 2p) dp = \frac{2}{15} \delta \end{aligned} \quad (41)$$

$$\tau_{wall} = \mu \left. \frac{du}{dy} \right|_{y=0} = \mu \frac{2U}{\delta} \quad (42)$$

$$\tau_{wall} = \rho U^2 \frac{d\theta}{dx} \quad (18)$$

$$\delta d\delta = \frac{15\nu}{U} dx, \delta = 0(x=0) \quad (43)$$

$$\delta = 5.48 \sqrt{\frac{\nu x}{U}} = \frac{5.48}{\sqrt{Re_x}} x \quad (44)$$

이를 다시 식(39), (40)에 대입하면 $\delta^*, \theta, \tau_{wall}$ 도 마찬가지로 x, U, ν 의 함수로 나타낼 수 있고, 이를 순서대로 식(45)~(47)에 나타냈다.

$$\delta^* = 1.83 \sqrt{\frac{\nu x}{U}} = \frac{1.83}{\sqrt{Re_x}} x \quad (45)$$

$$\theta = 0.73 \sqrt{\frac{\nu x}{U}} = \frac{0.73}{\sqrt{Re_x}} x \quad (46)$$

$$\tau_w = 0.37 \rho U \sqrt{\frac{U\nu}{x}} = \frac{0.37 \rho U^2}{\sqrt{Re_x}} \quad (47)$$

식(46)과 C_D, D 와 θ 의 관계를 이용하면 C_D, D 또한 x, U, ν, L 의 함수로 나타낼 수 있다.

$$C_D = \frac{2\theta}{L} = \frac{1.46}{L} \sqrt{\frac{\nu x}{U}} = \frac{1.46}{\sqrt{Re_x}} \frac{x}{L} \quad (48)$$

$$D = \rho U^2 w \theta = 0.73 \rho U^2 w \sqrt{\frac{\nu x}{U}} = \frac{0.73 \rho U^2 w}{\sqrt{Re_x}} x \quad (49)$$

5. PIV 이산벡터장을 통해 구한 실험값, 수치 해석을 이용하여 구한 이론값, 2차 다항식 형태 속도분포를 가정하여 구한 이론값의 비교, 다르다면 다른 원인 고찰

5.1 수치해석적 이론값&2차 다항식 형태 속도분포 가정 하에서 얻은 이론값

$\delta, \delta^*, \theta, \tau_w, D, C_D$ 를 두 가지의 방법을 통하여 이론적으로 x, U, ν, L, w 와 무차원 수인 Re_x 의 함수로 나타낼 수 있다. 각각을 Table 7에 나타내었다. 모든 물리량의 형태는 비슷하나 계수의 차이가 있다. 이는 수치해석을 이용하여 구하는 $u_x(y)$ 가 이론에서 사용한 이차방정식과 상당히 유사한 형태이기는 하나 조금의 차이가 있기 때문이다.

	수치해석	2차 $u_x(y)$ 이용
δ	$\delta = \frac{5.0}{\sqrt{Re_x}} x$	$\delta = \frac{5.48}{\sqrt{Re_x}} x$
δ^*	$\delta^* = \frac{1.721}{\sqrt{Re_x}} x$	$\delta^* = \frac{1.83}{\sqrt{Re_x}} x$
θ	$\theta = \frac{0.664}{\sqrt{Re_x}} x$	$\theta = \frac{0.73}{\sqrt{Re_x}} x$
τ_w	$\tau_w = \frac{0.332 \rho U^2}{\sqrt{Re_x}}$	$\tau_w = \frac{0.37 \rho U^2}{\sqrt{Re_x}}$
D	$D = \frac{0.664 \rho U^2 w}{\sqrt{Re_x}} x$	$D = \frac{0.73 \rho U^2 w}{\sqrt{Re_x}} x$
C_D	$C_D = \frac{1.33}{\sqrt{Re_x}} \frac{x}{L}$	$C_D = \frac{1.46}{\sqrt{Re_x}} \frac{x}{L}$

Table 7. Theoretical values of various physical quantities

5.2 실험값과 이론값의 비교

이론값은 5.1의 Table 7에 나타난 값을 이용하였고, 점성 계수, 밀도, 동점성계수를 계산할 때 식(27),(28)을 이용하여 계산하였다. 이를 이용하여 각각의 rpm에서의 Re_x 는 식(50)와 같이 나타낸다.

$$\mu = 1.002 \times 10^{-3} \text{Ns/m}^2, \rho = 998 \text{kg/m}^3 \quad (27)$$

$$\nu = \mu/\rho = 1.004 \times 10^{-6} \text{m}^2/\text{s} \quad (28)$$

$$Re_x = 45318.73x \text{ (10rpm)} \quad (50)$$

$$Re_x = 219521.91x \text{ (30rpm)}$$

5.3 각 rpm에서 $\delta, \delta^*, \theta, \tau_w$ 의 비교

세 지점에서 구한 $\delta, \delta^*, \theta, \tau_w$ 의 실험값과 이론적으로 x-direction에 따른 $\delta, \delta^*, \theta, \tau_w$ 의 그래프를 통하여 세 가지 value를 비교해보았고, 이를 Fig 16~23에 나타냈다.

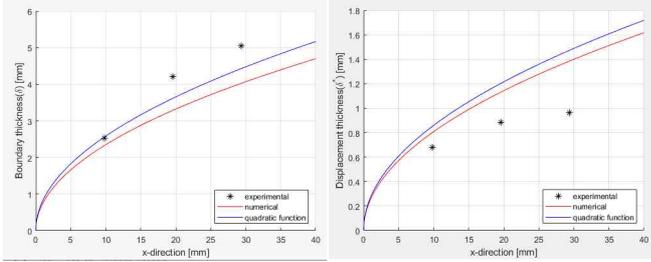


Fig 16. δ 비교 (10rpm) Fig 17. δ^* 비교 (10rpm)

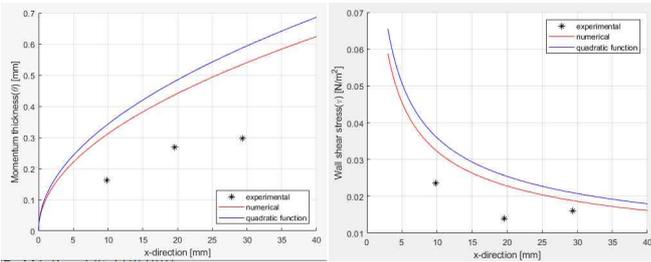


Fig 18. θ 비교 (10rpm) Fig 19. τ_w 비교 (10rpm)

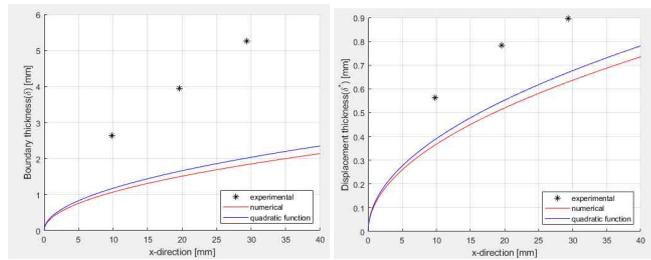


Fig 20. δ 비교 (30rpm) Fig 21. δ^* 비교 (30rpm)

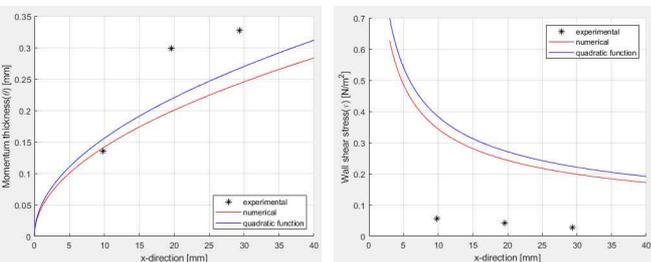


Fig 22. θ 비교 (30rpm) Fig 23. τ_w 비교 (30rpm)

5.4 D, C_D 의 비교 (each rpm, each L)

10 rpm	D/w [N/m]	C_D
using θ	3.368×10^{-4}	0.03327
using τ_w	2.211×10^{-4}	0.02184
수치해석	6.379×10^{-4}	0.06301
2차 $u_x(y)$ 이용	7.014×10^{-4}	0.06928
30 rpm	D/w [N/m]	C_D
using θ	65.447×10^{-4}	0.02755
using τ_w	3.131×10^{-4}	0.00132
수치해석	68.014×10^{-4}	0.02863
2차 $u_x(y)$ 이용	74.774×10^{-4}	0.03148

Table 7. Drag, Drag coefficient 비교 ($L=9.8mm$)

10 rpm	D/w [N/m]	C_D
using θ	5.558×10^{-4}	0.02745
using τ_w	4.098×10^{-4}	0.02023
수치해석	9.022×10^{-4}	0.04456
2차 $u_x(y)$ 이용	9.919×10^{-4}	0.04899
30 rpm	D/w [N/m]	C_D
using θ	144.48×10^{-4}	0.03125
using τ_w	8.985×10^{-4}	0.00194
수치해석	96.187×10^{-4}	0.02077
2차 $u_x(y)$ 이용	105.747×10^{-4}	0.02287

Table 8. Drag, Drag coefficient 비교 ($L=19.6mm$)

10 rpm	D/w [N/m]	C_D
using θ	6.137×10^{-4}	0.02168
using τ_w	5.571×10^{-4}	0.01968
수치해석	11.049×10^{-4}	0.03771
2차 $u_x(y)$ 이용	12.148×10^{-4}	0.04142
30 rpm	D/w [N/m]	C_D
using θ	158.512×10^{-4}	0.02387
using τ_w	12.616×10^{-4}	0.00183
수치해석	117.804×10^{-4}	0.01712
2차 $u_x(y)$ 이용	129.513×10^{-4}	0.01882

Table 9. Drag, Drag coefficient 비교 ($L=29.4mm$)

5.5 실험값/이론값이 다른 이유

먼저 실험값과 이론값이 다른 이유는 두 가지로 나눌 수 있다. 첫 번째는 PIV를 진행하는 과정이나 유동장을 분석하는 과정에서 생긴 측정 오차이다. 두 번째는 Navier-Stokes equations을 수치해석적으로 푸는 첫 번째 방법이나 2차 속도분포를 이용하여 이론적으로 계산하는 두 번째 방법이 완전하게 실험의 상황을 설명할 수 없는 한계로 인하여 생기는 차이가 존재한다. 두 가지를 따로 설명하고자 한다.

(1) PIV를 통한 측정오차

PIV에 의한 측정오차의 가장 큰 이유는 PIV를 통해 얻는 유동장 $u(i,j)$ 이 이산 유동장인 것이다.

두 개의 이론에서 유체의 연속체 가정 하에서 이론을 전개하는데 PIV를 통해 실험값을 계산하는 것은 이러한 연속체 가정 하에서 계산할 수 없다. 이것이 가장 큰 문제가 되는 것은 τ_{wall} 을 계산할 때 발생한다. Fig 24는 $u_x(y)$ 가 이차함수임을 가정하고 $\delta = 2mm$, $U = 0.2204m/s$ 로 가정하고, plot해본 것이다. 빨간색 직선은 $u_x(y)$ 의 0에서의 접선이며 파란색 직선은 $u_x(y)$ 의 할선이다.

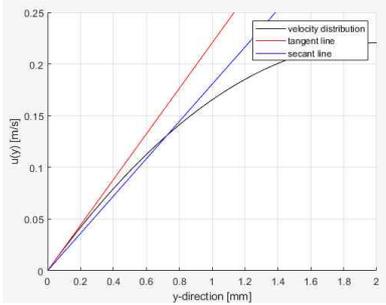


Fig 24. τ_w 의 오차 이유 설명

연속벡터장으로 τ_{wall} 계산할 때 빨간색 직선의 기울기를 얻어낼 수 있다. 하지만 이산벡터장을 이용한다면 파란색 직선의 기울기를 이용하여 τ_{wall} 을 계산해야 하고, 이는 Fig 19, Fig 23에서 이론값보다 τ_{wall} 이 작아지는 이유를 설명할 수 있다. 이것은 이산벡터장의 간격이 더욱 커질수록 차이가 커진다. 10rpm에서는 벡터장 사이의 간격이 10px, 30rpm에서는 15px였다. (두 개의 실험에서 ROI와 reference length는 같으므로, px의 실제 길이가 같다.) 따라서 이산벡터장의 간격이 더욱 큰 30rpm에서의 τ_{wall} 이 이론값과의 차이가 더욱 큰 것을 관찰할 수 있다.

Table 7, 8, 9의 30rpm에서 τ_w 를 이용하여 D, C_D 를 계산하면 이론값과 매우 큰 오차가 발생하는데 이것은 Fig 2에 의한 오차가 누적되고, 또한 평판 바로 위에서는 속도변화가 매우 크기 때문에 PIV 기법에서 오차가 많이 발생한다. 이러한 모든 이유가 복합적으로 작용하여서 발생하는 현상이다. 또한 마찬가지로 이유로 인해서 θ 를 이용하여 구한 Drag force는 항상 τ_{wall} 보다 큰 것을 확인할 수 있다. 이는 θ 또한 오차가 발생하지만 Fig 24의 현상에 의해 τ_{wall} 에서 더욱 많은 오차가 발생하였기 때문이다.

또한, Boundary thickness가 ROI의 크기에 비해서 매우 작으므로, 1/4-law를 지키고, 실험이

제대로 진행될 수 있는 한에서 Interrogation window를 작게 잡더라도 Boundary layer의 경계까지 속도벡터 5~10개까지 얻을 수 있었다. 이로 인해서 이산벡터장을 이용한 식(23), (24)를 통하여 δ^*, θ 를 계산하는 과정에서도 오차가 발생한다. 정적분은 함수 아래의 넓이를 무한개로 쪼개서 계산하는 것인데 함수값 5~10개의 데이터를 통하여 정적분의 값을 근사하였기 때문에 오차가 발생한다.

이러한 오차를 해결하기 위해서 5~10개의 데이터로 회귀분석하여 $u_x(y)$ 를 2차 이상의 함수로 얻어낸 후에 δ^*, θ, τ 을 계산하는 방법이 있다. 이러한 방식으로 진행된다면 τ_{wall} 을 계산하는 것에 있어서 Fig 24와 같은 오차를 줄일 수 있을 것이라고 생각한다. 또한, 이산벡터장의 간격이 조밀할수록 실험이 정확하게 진행될 수 있으므로, 그러한 방법을 추가로 생각해볼 수 있다.

(2) 이론값과 실제 실험 상황의 차이

가장 이론과 실제 실험 상황의 괴리를 가져오는 것은 실제 실험 상황이 완전한 층류가 아니라는 점이다. 이론값을 계산할 때는 층류를 가정하고, 계산하였다. 하지만 실제 실험 상황에서 완벽한 층류의 flow를 따르지 못한다. 이는 경계층을 발생시키는 평판이 ideal하지 않고, 표면의 거칠기가 존재하며 평판에서 계속 진행하면서 vortex가 발생하는 점, 또한 10rpm 일부에서 레이놀즈 수가 1000보다 낮은 점과 더불어 복합적인 이유 때문이다. 따라서 이러한 차이가 실험값과 이론값의 차이를 발생시킨다.

실제로 이론에서는 Boundary thickness에서의 x방향 속력이 free stream velocity를 넘지 못한다. 하지만 Fig 12, Fig 13을 보면 $y = \delta$ 에서의 속력이 Free stream velocity보다 크게 계산된다. 이로 인해서 δ^*, θ 를 식(23), 식(24)를 통하여 계산하는 과정에서 음수 항을 더하여 오차가 발생한다. 이는 실제 실험 상황과의 차이와 실제 PIV 적용 과정과 더불어 발생한 오차이다.

$$\delta^* = \sum_{j=1}^k \left(1 - \frac{u(n,j)}{U}\right) \frac{\delta}{k} \quad (23)$$

$$\theta = \sum_{j=1}^k \frac{u(n,j)}{U} \left(1 - \frac{u(n,j)}{U}\right) \frac{\delta}{k} \quad (24)$$

참 고 문 헌

5.6 실험의 의미

0.0455m/s, 0.2204m/s의 free stream velocity를 갖는 유체의 $\delta, \delta^*, \theta, \tau_w, D, C_D$ 의 실험값과 이론값을 각각 비교해볼 수 있었다. 각각의 free stream velocity, 물리량마다 실험값과 이론값의 차이를 관찰할 수 있었다. 실험에서도 x(평판의 시작부터의 거리)가 증가함에 따라서 δ, δ^*, θ 가 증가하는 것의 경향성을 확인할 수 있었고, τ_{wall} 은 점점 감소하는 경향성을 확인할 수 있었다. 이러한 관찰들을 통하여 Boundary layer의 발달에 따른 여러 현상을 직접 관찰할 수 있었다.

5.7 적절한 free stream velocity 논의

Fig 16~23을 보면 10rpm이 30rpm보다 더욱 이론값과 실험값의 차이가 적은 것을 관찰할 수 있다. 비록 10rpm의 일부가 레이놀즈 수가 1000보다 작더라도 이는 10rpm이 30rpm에 비해 1/4배 작은 free stream velocity를 가지기 때문이라고 생각한다. free stream velocity, 즉 촬영한 사진에서 전체적으로 작은 유속으로 운동하였으므로 더욱 안정적으로 PIV를 진행할 수 있었고, 이산벡터장의 벡터 행렬의 행 개수와 열 개수 또한 많이 확보할 수 있었다. 이러한 이유들로 10rpm이 30rpm보다 실험이 더욱 정확하게 진행되었다고 생각한다.

본 실험에서 다른 free stream velocity로 실험을 진행한다면 적당한 free stream velocity를 정하는 것에는 1/4-law 고려와 레이놀즈 수를 동시에 고려해야 할 것이다. 1/4-law와 PIV 기법을 생각했을 때는 더욱 느린 free stream velocity가 유리할 것이며 이 때 너무 느리면 경계층 유동이 정확하게 관찰되지 않을 수 있으므로, 적당한 free stream velocity를 설정하는 것이 중요할 것이다. 또한 0.0455m/s(10rpm에서의 free stream velocity)보다 느린 free stream velocity를 갖는 유체로 본 실험을 진행하면 물보다 동점성계수가 작은 액체로 실험을 진행하면 레이놀즈 수를 높일 수 있는 방법도 있을 것이다.

[1] Seoul National University Mechanical Engineering, "Mechanical Engineering Experiment"(2023), Westsea planning, pp.52~77.

[2] Wikipedia, "Boundary layer thickness", February 18, 2023, accessed on May 21. https://en.wikipedia.org/wiki/Boundary_layer_thickness

[3] F. M. White, 2016, Fluid Mechanics 8th edition.